ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

О КЛАССАХ ГИПЕРКОМПЛЕКСА ПАР ГИПЕРКВАДРИК И ТОЧЕК

В.П.Ш а п е н к о
(Калининградское ВИОЛКУ)

В n-мерном проективном пространстве продолжается изучение классов невырожденного n-мерного многообразия-гиперкомплекса V_n -пар фигур (P,Q), состоящих из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P. В работе [1] рассмотрено ассоциированное главное расслоение $G_\tau(P_n)$, базой которого является область пространства P_n, описанная точкой P, а типовым слоем - подгруппа стационарности G_τ $(\tau=n^2+n)$ гиперплоскости L_{n-1}, полярно-сопряженной точке P относительно гиперквадрики Q. Изучение проводилось в подвижном репере $\mathcal{R}^1=\{\bar{A}_0,\bar{A}_1,\dots,\bar{A}_n\}$, вершины A_i $(i,j,\dots=1,2,\dots,n)$ которого помещены в гиперплоскость L_{n-1}. В главном расслоении $G_\tau(P_n)$ с помощью форм связности $\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\Delta x^k$, $\tilde{\omega}^i_0=\omega^i_0-\Gamma^i_j\Delta x^j$, $\tilde{\omega}^0_0=\omega^0_0-\Gamma_i\Delta x^i$ была задана фундаментально-групповая связность по Г.Ф.Лаптеву.

Т е о р е м а 1. Адаптация репера $\mathcal{R}^1$, состоящая в совмещении точек P и A_0, сужает ассоциированное расслоение $G_\tau(P_n)$ до пространства с линейной связностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая условие совмещения точек P и A_0, получим, что формы ω^i_0 в новом репере $\mathcal{R}^2$ стали базисными. При этом уравнения (8) [1] принимают вид:

$$d\omega^i_0=\omega^k_0\wedge(\omega^i_k-\delta^i_k\omega^0_0),\quad d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+R^i_{jk\ell}\,\omega^k_0\wedge\omega^\ell_0,$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам $R^i_{jk\ell}=\delta^i_\ell\Lambda_{jk}$. Из полученных структурных уравнений в силу теоремы Картана-Лаптева делаем вывод, что ассоциированное расслоение $G_\tau(P_n)$ представляет собой пространство с фундаментально-групповой связностью, которую естественно называть линейной связностью. Для форм $\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-T^i_{jk}\omega^k_0$ выполняются уравнения

$$d\tilde{\omega}^i_j=\tilde{\omega}^k_j\wedge\tilde{\omega}^i_k+\omega^k_0\wedge\nabla T^i_{jk}+(\Lambda_{jk}\delta^i_\ell-T^m_{jk}T^i_{m\ell})\,\omega^k_0\wedge\omega^\ell_0.$$

Из этих уравнений следует, что другая связность $G_\tau(P_n)$ задается с помощью поля тензора деформации $T=\{T^i_{jk}\}$ на базе P_n, компоненты которого должны удовлетворять сравнениям

$$\nabla T^i_{jk}\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\ \omega^i_0).\qquad(1)$$

В работе [2] рассмотрены классические аффинные связности четырех типов, инвариантно присоединенные к гиперкомплексу V_n. Компоненты каждого из объектов связностей Γ, G, γ, Π относительно описанного выше репера $\mathcal{R}^2$ удовлетворяют системе сравнений (1), откуда заключаем, что эти связности представляют собой конкретные типы линейных связностей, определяемых разными тензорами деформации.

Относительно репера $\mathcal{R}^2$ уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа гиперкомплекса V_n записывались в виде [1]:

$$a_{ij}x^ix^j+(x^0)^2=0,\qquad(2)$$

$$-\omega^0_i=M_{ij}\omega^j_0,\quad \nabla a_{ij}=a_{ijk}\,\omega^k_0.\qquad(3)$$

При продолжении системы уравнений (3) получим $\nabla M_{ij}=M_{ijk}\omega^k_0$, $\nabla a_{ijk}=a_{ijk\ell}\,\omega^\ell_0$. С гиперкомплексом V_n ассоциируется дифференцируемое отображение $f: P_n\to R(P,Q)$, которое каждой точке $P\in P_n$ ставит в соответствие пару фигур (P,Q), принадлежащую гиперкомплексу V_n. Как обобщение понятия квазихарактеристических направлений точечных отображений, определены квазихарактеристические направления отображения f. Инвариантная направляющая $\tilde{\mathfrak{I}}$ конуса $\tilde{\chi}$ квазихарактеристических направлений отображения f задается системой уравнений

$$\gamma^i_{jk}x^jx^k-2x^ix^0=0.\qquad(4)$$

Направляющая $\tilde{\mathfrak{I}}$, названная по аналогии с точечными отображениями индикатрисой отображения f, является алгебраическим многообразием, содержащим точку P, в общем случае размерности 0 и порядка 2^n. Прямая связки $\{P\}$ тогда и только тогда принадлежит конусу $\tilde{\chi}$, когда она имеет две общие точки с направляющей $\tilde{\mathfrak{I}}$ или касается ее в точке P.

Согласно [2], гиперкомплекс V_n, для которого имеют место соотношения

$$a_{ijk}=a_{ij}P_k\quad(\nabla P_i=P_{ij}\,\omega^j_0),\qquad(5)$$

назван гиперкомплексом V_n^H. Дадим геометрическую характеристику класса гиперкомплексов V_n^H. Фиксируем образующий элемент (P°, Q°) многообразия V_n. Точка P° совпадает с вершиной репера $\mathcal{R}^2$, а соответствующая гиперквадрика Q° определена уравнением (2). Неоднородные координаты b_{ij} смежной с Q° гиперквадрики Q

$$b_{ij} x^i x^j + 2b_i x^i + 1 = 0 \qquad (6)$$

можно задать следующим образом:

$$b_{ij} = a_{ij} + \nabla a_{ij} + \langle 2 \rangle, \quad b_i = -(\omega_i^\circ + a_{ij}\omega_\circ^j) + \langle 2 \rangle, \qquad (7)$$

где символом $\langle 2 \rangle$ обозначена совокупность членов порядка малости $p \geq 2$ относительно приращений главных параметров.

Пусть H -подгруппа проективной группы преобразований, оставляющая неподвижными все точки гиперплоскости L_{n-1}. Обозначим через H_{Q° орбиту элемента Q° относительно подгруппы H проективной группы.

Т е о р е м а 2. Гиперкомплекс V_n^H пар фигур (P, Q) характеризуется тем, что ассоциированное с ним многообразие $V_n^H(Q)$ гиперквадрик Q в каждом элементе $Q^\circ \in V_n^H(Q)$ касается многообразия H_{Q°.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произвольная гиперквадрика многообразия H_{Q° может быть задана уравнением

$$k a_{ij} x^i x^j + 2b_i x^i + 1 = 0. \qquad (8)$$

Для гиперкомплекса класса V_n^H из (7) получим $b_{ij} = (1 + P_k\omega_\circ^k) a_{ij} + \langle 2 \rangle$. Отсюда с точностью до членов второго порядка малости уравнение гиперквадрики Q, принадлежащей многообразию $V_n^H(Q)$, имеет вид:

$$(1 + P_k\omega_\circ^k) a_{ij} x^i x^j - 2(\omega_i^\circ + a_{ij}\omega_\circ^j) x^i + 1 = 0. \qquad (9)$$

Сопоставив уравнения (8) и (9), приходим к нашему утверждению.

Обозначим через $C_\circ$ квадратичный элемент, определяемый системой уравнений $x^\circ = 0$, $a_{ij} x^i x^j = 0$.

Т е о р е м а 3. Квадратичный элемент $C_\circ$ принадлежит фокальному многообразию семейства $V_n^H(Q)$ гиперквадрик Q, ассоциированного с гиперкомплексом V_n^H.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы вытекает из рассмотрения системы уравнений, определяющей фокальное многообразие

семейства $V_n^H(Q)$: $(P_i x^\circ + 2a_{ik}x^k - 2M_{ki}x^k)x^\circ = 0$, $a_{ij}x^i x^j + (x^\circ)^2 = 0$.

Обозначим через χ конус изотропных направлений относительно метрики псевдориманова пространства, определяемого на гиперкомплексе V_n полем симметрического тензора a_{ij} [2].

Т е о р е м а 4. Если гиперкомплекс V_n является гиперкомплексом V_n^H, то конус χ состоит из квазихарактеристических прямых отображения $\tilde{f}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если прямая PP^* имеет с индикатрисой $\tilde{\mathcal{J}}$ две общие точки, то она, как указано выше, является квазихарактеристической прямой отображения $\tilde{f}$. Пусть точка $P^*(x^\circ, x^i)$ принадлежит конусу χ, т.е. выполняется соотношение

$$a_{jk} x^j x^k = 0. \qquad (10)$$

Подставим координаты $(x^\circ + t, x^i)$ произвольной точки прямой PP^* в систему уравнений (4) индикатрисы $\tilde{\mathcal{J}}$. Получим

$$2(P_j x^j - 2(x^\circ + t))x^i = 0, \quad a_{jk} x^j x^k = 0,$$

откуда следует, что прямая PP^* имеет с $\tilde{\mathcal{J}}$ две общие точки - точку P и точку с координатами $(\frac{1}{2}P_j x^j; x^i)$.

О п р е д е л е н и е. Гиперкомплексом V_n^S называется гиперкомплекс V_n пар фигур (P, Q), для которого тензор M_{ij} симметричен: $M_{[ij]} = 0$.

Известно [3], что невырожденный тензор M_{ij} каждой прямой AX, где точка $X = x^i A_i$ принадлежит гиперплоскости L_{n-1}, ставит во взаимно однозначное соответствие две $(n-2)$-плоскости:

$$\ell_{n-2}^1: \ M_{ij} x^j y^i = 0, \quad y^\circ = 0, \qquad (11)$$

$$\ell_{n-2}^2: \ M_{ij} x^i y^j = 0, \quad y^\circ = 0. \qquad (12)$$

Очевидно, что для гиперкомплексов класса V_n^S и только для них плоскости ℓ_{n-2}^1 и ℓ_{n-2}^2 в соответствиях (11) и (12) совпадают.

Т е о р е м а 5. Если геодезические связностей Γ и G на гиперкомплексе V_n^S имеют совпадающие касательные, то они имеют и одинаковые соприкасающиеся плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Под „кривой L в P_n'' будем понимать параметризованную кривую, т.е. дифференцируемое отображение числовой прямой $\mathbb{R}$ в пространство P_n. Координатное представление отображения L имеет вид

$$\bar{x}^i = \Lambda^i t + \frac{1}{2} M^i t^2 + \langle 3 \rangle. \qquad (13)$$

Пусть кривая L_1 (13) является геодезической связности Врэнчану Γ [2] на гиперкомплексе V_n^S. Тогда имеют место уравнения $M^i = -\Gamma^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k$, и кривая L_1 задается следующим образом:

$$\bar{x}^i = \Lambda^i t - \frac{1}{2} W^{il} M_{ljk} \Lambda^j \Lambda^k t^2 + \langle 3 \rangle, \qquad (14)$$

где W^{il} -тензор, взаимный тензору M_{lj}.

Обозначим L_2 -геодезическую связности G на гиперкомплексе V_n^S. Для нее выполняются уравнения $M^i = -G^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k$. Учитывая соотношения $M_{[ij]} = 0$ и условие нашей теоремы, получим координатное представление геодезической L_2:

$$\bar{x}^i = \mu \Lambda^i \tau - \frac{1}{4} \mu^2 W^{il} M_{ljk} \Lambda^j \Lambda^k \tau^2 + \langle 3 \rangle. \qquad (15)$$

Из сравнения разложений (14) и (15) следует утверждение теоремы.

Библиографический список

1. Ц а п е н к о В.П. Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P,Q) //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград. 1982. Вып. 13. С. 107-111.

2. Ц а п е н к о В.П. Аффинные связности, инвариантно присоединенные к гиперкомплексу $V_n(P,Q)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1984, Вып. 15. С. 100-103.

3. К о н д а к о в а Э.М., И в л е в Е.Т. О n-семействе невырожденных нуль-пар в P_n // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике. Томск, 1970. С. 125-127.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 18 1987

УДК 514.75

О ВЛОЖЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

М.А. Ч и н а к
(Омский политехнический институт)

В статье изучается расположение комплексных подмногообразий в $\mathbb{CP}^n$ с дополнительными условиями на гиперболический тип. Пусть $M^k \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$-некоторое компактное подмногообразие, причем M^k допускает кэлерову метрику отрицательной голоморфной секционной кривизны ([1, стр. 158]) и накрывается многообразием Штейна N. Предположим, что $H^2(N;\mathbb{Z}) \cong 0$. Рассмотрим произвольное подпространство $H \cong \mathbb{CP}^k$ в $\mathbb{CP}^n$, и пусть $p = p_H$ обозначает естественную проекцию $p : \mathbb{CP}^n \cap \mathrm{dom}\, p \to H$ (где $\mathrm{dom}\, p$ -область определения отображения p). В работе показано, что многообразие M указанного вида и подпространство $H \subset \mathbb{CP}^n$ определяют аналитическое подмножество $A \subset M$, такое, что либо отображение $p|M \cap \mathrm{dom}\, p \setminus A$ является конечнолистным накрытием на свой образ, либо $A = M$ и p всюду вырождено. Более точно справедлива

Т е о р е м а 1. Пусть $M \subset \mathbb{CP}^n$ проективно-алгебраическое замкнутое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{C}} M = k > 0$ и на M вводится кэлерова метрика отрицательной голоморфной секционной кривизны. Предположим, что M накрывается многообразием Штейна N, причем $H^2(N;\mathbb{Z}) \cong 0$. Пусть $H \cong \mathbb{CP}^k$ -некоторое подпространство в $\mathbb{CP}^n$ и $p : \mathbb{CP}^n \cap \mathrm{dom}\, p \to H$ -естественная проекция. Тогда найдется целое число $m > 0$, такое, что если для $x \in H$ отображение p локально биголоморфно в точках множества $p^{-1}(x)$, то $\mathrm{card}\, p^{-1}(x) \le m$. Данный результат демонстрирует жесткость комплексной структуры многообразия отрицательной кривизны. Условие теоремы является существенным, поскольку можно построить вложение в $\mathbb{CP}^n$ односвязного гиперболического по Кобаяси многообразия M_0, для которого мощность дискретных слоев некоторых отображений p нельзя оценить сверху единой константой.